

11

Teorías gauge del campo electromagnético

Hemos visto que de una única función lagrangiana se derivan todas las ecuaciones del electromagnetismo por variaciones.

Sin embargo, dicha teoría no nos justifica desde primeros principios cómo debe ser la función lagrangiana y, en particular, tampoco nos justifica la razón por la que el término de interacción de la materia con el campo electromagnético adopta la forma escogida. Simplemente, se ha remitido la justificación de las ecuaciones de Maxwell a un principio más general, en que algunas de sus premisas quedan todavía por justificar.

Expondremos en este capítulo una de las razones por la que el término de acoplamiento de la materia con el campo electromagnético adopta la forma anteriormente escogida.

Para ello, nos debemos remitir a otra teoría más general como es la mecánica cuántica, ampliamente aceptada y verificada experimentalmente y que, como veremos, tiene también un carácter predictivo sobre la razón de cómo son determinados aspectos de nuestro mundo electromagnético.

También otra importante consecuencia de esta teoría es por qué la carga y la energía deben ser conservadas localmente. Es decir, que no basta con que la masa y la energía se conserven globalmente de forma que desaparezcan y aparezcan en otro lugar, sino que deben conservarse localmente en cada punto del espacio, mediante una ecuación de continuidad. Esto también nos llevará en otra sección a los problemas de la radiación y de los flujos de energía como consecuencia de la invarianza de la fase local.

Aunque la teoría gauge basada en las simetrías internas de la función de ondas de la ecuación de Dirac, nos determina completamente la estructura de las ecuaciones de Maxwell y la interacción de las cargas con el campo electromagnético, sin embargo, a las mismas conclusiones se puede llegar a partir de la ecuación de Schrödinger o de la lagrangiana clásica si se añaden otras hipótesis complementarias.

Analizar estas hipótesis adicionales tiene también gran importancia física, ya que nos ilustran de porque las teorías clásicas son operativas en muchos casos a nivel macroscópico, y de porque el campo electromagnético tiene en algunas circunstancias un comportamiento mecánico, y sirven también de ilustración de cómo se interrelaciona operacionalmente la física clásica con la cuántica.

Simetrías, principios de conservación y campos gauge

Existen tres conceptos físicos que están muy interrelacionados: Simetrías, leyes de conservación, y campos gauge.

Las transformaciones gauge son aquellas transformaciones continuas que tienen alguna simetría local que deja invariantes determinadas propiedades de las leyes físicas ante dichas transformaciones.

La experiencia indica que todos los campos observados en la naturaleza son de tipo gauge y que cada simetría continua es una simetría local, lo que ha dado lugar al denominado principio gauge.

Según Mills, en la naturaleza existen tres teorías gauges independientes, sin que exista todavía una teoría unificada de ellas que explique el origen de todas las fuerzas actualmente conocidas.

Fueron Noether, Weyl y London, los primeros que indicaron la importancia de las simetrías en la comprensión de la naturaleza, ya que condicionan la estructura de las ecuaciones permitidas, y la forma de las interacciones, y el número y propiedades de las partículas que interactúan.

Noether demostró que para sistemas en que se puede aplicar principios variacionales, para cada simetría continua de la naturaleza existe una correspondiente ley de conservación y que, para cada ley de conservación hay una simetría, lo que ha pasado a denominarse como principio de simetría del teorema de Noether.

Noether demostró, que si existe una formulación lagrangiana de una teoría física, las simetrías que aparecen en la lagrangiana son también que aparecen en las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento en la naturaleza son en general derivables de un principio variacional que hace estacionaria la variación de la acción, definida como la integral de la lagrangiana ante las trayectorias posibles.

El principio de Hamilton de mínima acción establece que en la naturaleza las ecuaciones de movimiento son aquellas que hacen estacionaria la acción frente a pequeñas desviaciones respecto a la trayectoria real, sin que exista todavía una justificación suficiente de porque existe este comportamiento en la naturaleza.

Como ya hemos visto, las ecuaciones de Maxwell pueden ser derivables también por un principio variacional aunque su lagrangiana es muy diferente a la que se define en mecánica en mecánica.

El principio variacional de Hamilton que hasta ahora parece tener una validez universal, reduce toda teoría física a determinar una lagrangiana adecuada, y según el teorema de Noether sus simetrías nos determinan también las leyes de conservación.

En el paso de la mecánica clásica a la mecánica cuántica se mantiene un teorema similar al de Noether entre simetrías y leyes de conservación, por lo que se habla del principio universal del teorema Noether.

Como ha demostrado Feynman con su formulación de la las integrales de camino, existe una estrecha relación entre la mecánica cuántica en su forma hamiltoniana con la lagrangiana clásica. Por ello no es de extrañar que las ecuaciones de la mecánica cuántica se puedan derivar también de principios variacionales.

Weyl y London fueron los primeros que intuyeron que el electromagnetismo era una manifestación de alguna simetría local, de forma similar a como sucede en la teoría de la relatividad en que las ecuaciones físicas deben ser las mismas para todos los observadores independientemente de su estado de movimiento relativo.

La invarianza gauge fue introducida por Weyl al tratar de unificar las teorías de largo alcance (electromagnetismo y gravitación) mediante una simetría de escala

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \hat{t} = \alpha(\vec{x}, t)t \\ \vec{x} &\rightarrow \hat{\vec{x}} = \alpha(\vec{x}, t)\vec{x} \end{aligned}$$

donde $\alpha(\vec{x}, t)$ es una función arbitraria.

Hemos visto que cuando en un sistema físico existen ciertas simetrías, como consecuencia del teorema de Noether se generan determinadas ecuaciones de conservación como identidades.

Si existen constricciones, las ecuaciones dinámicas pueden contener una función arbitraria de las coordenadas, y entonces se dice que existe un campo gauge local, lo que fue estudiado en detalle por Cartan con su teoría de invariantes y de formas

diferenciales. Se demuestra que en un sistema el número de grados de libertad no puede ser mayor que el número de variables dinámicas menos el número de grados de libertad de las funciones gauge. La ecuación de Laplace o de Poisson para el potencial admite un gauge del tipo

$$\phi \rightarrow \phi + \alpha(\vec{x}, t)$$

y por ello no tienen ningún grado de libertad, y se puede decir que ese tipo de ecuaciones son más bien restricciones al campo. La existencia de un campo gauge implica que alguna de las ecuaciones dinámicas son restricciones, como sucede con la ley de Gauss, como ya vimos en el capítulo de la teoría dinámica.

Las magnitudes físicas observables como las intensidades de campo no pueden contener ninguna libertad gauge. Por ejemplo, una fuerza central electrostática verifica $\vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$ y $\vec{\nabla} \wedge \vec{f} \equiv 0$, no tiene ninguna libertad gauge, ya que si existiera campo gauge α tiene que verificarse $\vec{\nabla} \alpha \equiv 0$ y $\vec{\nabla} \wedge \alpha \equiv 0$, y por el teorema de Helmholtz debería ser $\alpha \equiv 0$.

Simetrías internas y principio gauge

En el capítulo de teorías geométricas, hemos visto que la invarianza de un sistema físico ante determinadas transformaciones del grupo de Galileo o de Poincaré (simetrías) tiene como consecuencia que determinadas magnitudes se conserven. También existen otros tipos de simetrías internas que también nos llevan a principios de conservación.

Para ver de una forma simple como actúan las simetrías en las propiedades del campo, tomemos el ejemplo dado por Lanczos con la siguiente lagrangiana

$$L = \vec{F}^* \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - ic \text{rot} \vec{F} \right)$$
$$\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} + ic \vec{B}$$

que corresponde a un campo electromagnético en el vacío cuando no hay fuentes de cargas y corrientes.

La variación respecto a $\vec{F}^*$ nos lleva a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$$

Si hacemos la transformación

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F} e^{i\Lambda}$$

donde Λ es una constante, comprobamos que la lagrangiana no cambia y es invariante ante esta transformación.

Supongamos ahora que Λ ya no es una constante, sino que es una función escalar de campo que depende la posición en el espacio $\vec{x}$ (principio gauge) y que además Λ es infinitesimalmente pequeña $\Lambda(\vec{x}) \ll 1$

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F} e^{i\Lambda(\vec{x})} \approx \vec{F}(1 + i\Lambda(\vec{x}))$$

La lagrangiana se transformará entonces como

$$L \rightarrow L' = L + \vec{F}^* \vec{F} \frac{\partial i\Lambda}{\partial t} - c(\vec{F}^* \wedge \vec{F}) \cdot \vec{\nabla} \Lambda$$

Como la acción de la lagrangiana debe ser una extremal, lo que es equivalente a hacer cero la variación respecto Λ , obtenemos como resultado:

$$\frac{\partial \vec{F}^* \vec{F}}{\partial t} + ic \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}^* \wedge \vec{F}) = 0$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (E^2 + c^2 B^2)}{\partial t} + c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = 0$$

que es la ecuación de la conservación de la energía del campo electromagnético en el vacío sin fuentes. Por tanto, de la simetría que deja invariante la lagrangiana ante una transformación de fase, se deduce como consecuencia que se debe conservar la energía.

Otro ejemplo es la lagrangiana

$$L = \psi^* \left(-i \frac{\partial \psi}{\partial t} + V\psi \right) + \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi \quad \hbar, c = 1$$

la cual es invariante ante un cambio de fase

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\Lambda}$$

Haciendo que Λ sea un campo escalar infinitesimal dependiente de las coordenadas (principio gauge)

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\Lambda} \approx \psi(1 - i\Lambda)$$

Haciendo que sea nula la variación respecto a Λ , obtenemos la ecuación de conservación

$$\frac{\partial \Psi \Psi^*}{\partial x} + \vec{\nabla} \cdot \frac{i}{2m} (\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi) = 0$$

que representa la conservación probabilística local de la carga.

En general, si existe una transformación de las variables de campo con un parámetro infinitesimal Λ que se cancela, entonces haciendo que Λ sea una nueva variable de campo (principio gauge), su ecuación conduce a una ecuación de conservación local del tipo

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

En mecánica, para los sistemas discretos, la invarianza ante una translación de la coordenada tiempo conduce a la conservación de la energía. La invarianza ante la translación en una dirección dada implica la conservación del momento lineal en esa dirección. La invarianza ante una rotación alrededor de un eje implica la conservación de momento angular respecto a dicho eje.

En los sistemas con variables de campo continuas, las invarianzas implican siempre leyes de conservación similares como las anteriormente mostradas.

El principio de Noether establece que para cada simetría continua con caracter de grupo, siempre existe asociada una ley de conservación local, y viceversa.

Simetrías gauge como origen de las ecuaciones de Maxwell

Sabemos por mecánica cuántica que, si la función de ondas $\psi(\vec{x}, t)$ es multiplicada por un factor de fase global constante $e^{i\Lambda}$, la densidad de probabilidad que viene dada por el módulo al cuadrado de la función de ondas $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ no cambia y, físicamente, el estado físico del sistema no varía.

Si Λ lo hacemos depender como una función $\Lambda(\vec{x})$ de la posición (que define una transformación gauge local), las derivadas parciales existentes en la ecuación de ondas destruyen la invarianza, salvo que se verifiquen determinadas condiciones que analizaremos.

London fue el primero que indicó que la simetría asociada con la conservación de la carga era debida a la invarianza de la fase local en la mecánica cuántica, y que Weyl la bautizó con el nombre de simetría gauge. Sin embargo, fue Weyl el primero que derivó las ecuaciones de Maxwell a partir de la lagrangiana de Dirac mediante una transformación de fase local que Pauli denominó como transformación gauge de primera clase.

Si la función de ondas sufre la transformación de primera clase

$$\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x})e^{-i\Lambda(\vec{x})}$$

con la condición de que el hamiltoniano se transforme de forma que su ecuación mantenga la misma forma estructural (simetría de la forma), entonces se deduce que la carga se conservará localmente, y además esta invarianza gauge determina toda la estructura de las ecuaciones del campo electromagnético.

Al ser $\Lambda(\vec{x})$ una función arbitraria y continua de los puntos del espacio se le denomina transformación gauge local. Si Λ fuese una constante la simetría se denominaría global.

Para mantener la invarianza de forma de la lagrangiana en una transformación gauge de fase local de primera clase, tuvo que introducir un campo gauge representado por un cuadvivector que define los potenciales electromagnéticos A^α que contrarresta los efectos de la transformación, y dedujo las ecuaciones cinemáticas de Maxwell de la ley de Faraday y la ley de ausencia de polos magnéticos como identidades a partir de dichos potenciales A^α con la única condición de que sufran una transformación denominada gauge de segundo orden

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda$$

donde Λ es una función arbitraria del espacio y del tiempo.

A partir del principio de mínima acción de Hamilton, mediante las ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange obtuvo las ecuaciones dinámicas de Maxwell de la ley de Gauss y de la ley de Ampère.

Fue Fock el primero en demostrar que la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica clásica también es invariante en forma ante una transformación gauge de primer orden si los potenciales A^α del campo electromagnético sufren una transformación gauge de segundo orden.

Esto se puede ver de forma simple con el ejemplo de Feynman que para una transformación de primera especie

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\Lambda}$$

se verifica la relación

$$(\vec{\nabla} - i\vec{A}')\psi' = e^{-i\Lambda}(\vec{\nabla} - i\vec{A})\psi$$

si $\vec{A}$ se tiene una transformación de segunda especie

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$$

Todo esto se puede reescribir de una forma más compacta si se define la derivada covariante

$$\vec{D}_c = \vec{\nabla} - i\vec{A}$$

con lo que la relación de transformación adopta la forma

$$\vec{D}_c \psi = e^{-iA} \vec{D}_c \psi$$

Principio de la simetría local

El principio de la simetría local afirma que en la naturaleza cada simetría continua asociada a una transformación gauge debe ser una simetría local.

Se define como simetrías a aquellas transformaciones por las que determinados aspectos de un objeto no cambian.

En la naturaleza hay muchas simetrías de comportamiento, como por ejemplo, las traslaciones o rotaciones en el espacio, e incluso las traslaciones en el tiempo.

Muchas de esta simetría son globales, es decir, no dependen de los puntos del espacio y del tiempo. Sin embargo muchas otras simetrías son locales, por lo que dependen de forma independiente de cada punto del espacio o del tiempo.

El tipo de simetría local siempre determina el carácter y la estructura matemática de la teoría física que da lugar.

El electromagnetismo y la relatividad obedecen a simetrías locales. Veremos que el electromagnetismo es debido a la invarianza de las ecuaciones ante un cambio de fase local de la función de ondas compleja. Este principio permite también considerar el campo electromagnético clásico como la localización del grupo $U(1)$ de la invarianza fase (gauge invarianza) del campo complejo de una lagrangiana hermitiana.

Es un principio dinámico que regula como los campos y las partículas interactúan y sus estructura matemática. Aunque es un principio clásico incorpora muchas de las características cuánticas. También puede ser formulado como un principio de relatividad independiente del marco de referencia. Su extensión a la independencia de la localización, orientación y estado de movimiento del observador, también es la base de la teoría general de la gravitación y de sus interacciones, y de las teorías actuales de unificación de las fuerzas.

Para que se verifique la invarianza de las ecuaciones ante este tipo de simetrías locales, veremos que es necesario introducir campos adicionales con las propiedades del campo electromagnético que compensen estas transformaciones.

Principio general de simetría

El teorema de Noether ampliado establece que para cada simetría continua siempre hay asociada una ley de conservación local y viceversa.

La simetría local (de fase en el caso del electromagnetismo), implica la existencia de un campo gauge (potencial vectorial y escalar electromagnético) con una estructura determinada (ecuaciones de Maxwell).

La estructura del campo gauge (potenciales del campo electromagnético) incluye y determina las forma de las interacciones y las magnitudes conservadas.

En mecánica cuántica de forma similar a la mecánica clásica, existen operadores $\hat{A}$ que tienen un doble papel:

Como representación de una variable dinámica A con valor medio $\langle A \rangle$

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^* A \psi d^3 \vec{x}$$

Como generadores de una clase de transformaciones de la función de onda

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\lambda \hat{A}} \psi(\vec{x})$$

donde λ es un parámetro real.

En particular si $\hat{A}$ es el operador momento $\hat{P}_i$ en la dirección x^i entonces ψ' difiere de ψ en un desplazamiento proporcional a λ en la dirección z .

Si $\hat{A}$ es el hamiltoniano $\hat{H}$ entonces ψ' representa una translación en el tiempo de la función de ondas ψ proporcional a λ .

Por tanto cada familia de transformaciones continuas está asociada con una variable física y viceversa.

En el caso de la mecánica cuántica -de forma similar a la mecánica clásica- el hamiltoniano $\hat{H}$ determina completamente la evolución temporal de la función de ondas

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}} \psi(0)$$

que es equivalente a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi$$

En mecánica cuántica el operador hamiltoniano está asociado con el operador de energía de forma similar a como en mecánica clásica el hamiltoniano está asociado con la energía del sistema, y es el que gobierna toda la dinámica del sistema.

Si dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan, es decir es independiente del orden en que se aplican, entonces la variable A es invariante ante la transformación generada por $\hat{B}$ y viceversa.

Si $\hat{A}$ es una variable dinámica y $\hat{B}$ es el hamiltoniano $\hat{H}$, entonces lo anterior nos indica que si la variable $\hat{A}$ es invariante ante una transformación generada por $\hat{H}$ es también una constante en el tiempo.

De forma inversa si $\hat{H}$ es invariante ante una transformación generada por $\hat{A}$, entonces $\hat{A}$ representa una simetría ya que $\hat{H}$ determina la evolución en el tiempo de las leyes dinámicas.

El teorema de Noether ampliado se formula diciendo que una variable dinámica A se conserva solo si las leyes dinámicas son invariantes (simetrías) ante las transformaciones generadas por $\hat{A}$.

Simetrías gauge local y potenciales del campo electromagnético

Consideremos que un operador hermitico $\hat{q}$ actúa sobre la función de ondas compleja ψ mediante una transformación infinitesimal de fase local

$$\hat{q}\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x})e^{-i\epsilon\Lambda(\vec{x})} \approx (1 - i\epsilon\Lambda)\psi(\vec{x})$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$.

La función de ondas sufrirá entonces una variación dada por

$$\delta\psi(\vec{x}) = \psi'(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \approx -i\epsilon\Lambda(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

Si en las ecuaciones dinámicas (como en la ecuación de Schrödinger) aparecen términos del tipo

$$\partial_\alpha\psi(\vec{x}) \equiv \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial x^\alpha}$$

entonces, una transformación de fase local afectará a las ecuaciones introduciendo términos adicionales del tipo

$$\delta[\partial_\alpha\psi(\vec{x})] = -i\epsilon\Lambda(\vec{x})\partial_\alpha\psi(\vec{x}) - i\epsilon(\partial_\alpha\Lambda(\vec{x}))\psi(\vec{x})$$

Para que las ecuaciones sean invariantes ante el cambio de fase, se introduce la derivada covariante definida por

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{i\varepsilon}{c} A_\alpha$$

donde los campos gauge A_α se determinan para que se cumpla la igualdad

$$\delta(D_\alpha \psi(\vec{x})) = -i\varepsilon \Lambda(\vec{x}) D_\alpha \psi(\vec{x})$$

lo que garantiza que las ecuaciones sean invariantes en forma ante la transformación gauge de fase cuando en la ecuación original se reemplaza las derivadas normales ∂_α por las derivadas covariantes.

La anterior ecuación es equivalente a

$$\delta A_\alpha = c \partial_\alpha \Lambda(\vec{x})$$

Si definimos A^α como un cuadvivector

$$A^\alpha = (\emptyset, cA_1, cA_2, cA_3) = (\emptyset, c\vec{A})$$

$$A_\alpha = (\emptyset, -cA_1, -cA_2, -cA_3) = (\emptyset, -c\vec{A})$$

la anterior ecuación es equivalente a

$$\delta \vec{A} = -\vec{\nabla} \Lambda$$

$$\delta \emptyset = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

o de forma explícita

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda \quad y \quad \emptyset \rightarrow \emptyset' = \emptyset + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

La transformación de fase local puede considerarse también como una transformación en los puntos del espacio por matrices unitarias U con dimensión uno, las cuales forman un grupo de Lie abeliano.

Por tanto, una transformación unitaria gauge de Lorentz $\psi \rightarrow U\psi$ se puede representar también como

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = U A_\alpha U^{-1} + iCU \partial_\alpha U^{-1} = L_{\alpha\beta} A^\beta + iCU \partial_\alpha U^{-1}$$

siendo una constante que como veremos más adelante debe tomar el valor

$$C = \frac{\hbar c}{q}$$

Otra consecuencia debida a que la simetría de fase global tiene un solo parámetro continuo, es la superposición lineal de las interacciones.

La invarianza ante la anterior transformación requiere que

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha - iCU\partial_\alpha U^{-1}$$

Vemos, por consiguiente, que la invarianza gauge local y la derivada gauge covariante están relacionadas con la invarianza ante las transformaciones gauge de Lorentz de la electrodinámica clásica para los potenciales del campo electromagnético.

La conservación de la carga procede de que $\psi^*\psi$ está relacionada con la distribución de carga y la carga total es un invariante ante los cambios gauge de fase.

Vemos que la ley de la conservación de la carga y la simetría asociada a la invarianza ante una transformación de la fase local de la función de ondas, implican la existencia de una campo vectorial gauge A^α que determina el campo electromagnético y la estructura de dicho campo.

En mecánica clásica toda la dinámica está determinada por la lagrangiana o la formulación equivalente hamiltoniana. Sin embargo la presencia de una constante con las dimensiones de la acción $\hbar$, indica que el proceso gauge está relacionado con la cuantización del campo electromagnético.

Veremos más adelante, que el paso a la mecánica cuántica se realiza de forma habitual cuantizando los operadores asociados a variables canónicas asociadas al hamiltoniano manteniéndose el principio de correspondencia, que postula que la mecánica cuántica debe reproducir los resultados de la mecánica clásica en el límite cuando los números cuánticos son grandes.

Simetrías gauge de fase local de la mecánica cuántica relativista como origen de las ecuaciones de Maxwell

Como la mecánica cuántica también es derivable por procedimientos variacionales de una lagrangiana, las simetrías de dicha lagrangiana serán las que determinen toda la estructura de la teoría.

Partiremos de la ecuación de ondas relativista de Dirac

$$(i\hbar c\gamma^\alpha D_\alpha - mc^2)\psi = 0$$

Se demuestra que esta ecuación de ondas es derivable por cálculo variacional de una densidad lagrangiana L_D que viene dada por

$$L_D = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\alpha \partial_\alpha - mc^2)\psi$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, $\psi^\dagger$ es la función hermitica de ψ , y γ^α son las matrices 4×4 de Pauli.

La lagrangiana L_D cumple las condiciones requeridas ya que es invariante ante las transformaciones de Lorentz relativistas y las transformaciones gauge de fase. Se puede verificar que las ecuaciones de Euler-Lagrange, tomando como variable de campo a la función de ondas, llevan directamente a la ecuación relativista de ondas de Dirac

$$\frac{\partial L_D}{\partial \psi} - \partial_\alpha \frac{\partial L_D}{\partial \psi_{,\alpha}} = 0 \rightarrow (i\hbar c \gamma^\alpha D_\alpha - mc^2)\psi = 0$$

Para un electrón si ψ es la función de onda de Dirac, la lagrangiana viene dada por

$$L_D = \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\alpha D_\alpha - mc^2)\psi$$

siendo la derivada covariante

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{iq}{\hbar c} A_\alpha$$

Ante una transformación gauge de fase local

$$\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) e^{-i\frac{q}{\hbar c} A(\vec{x})}$$

se postula que se debe mantener invariante la forma de la estructura de de lagrangiana (invarianza de forma)

$$L_D = \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\alpha D_\alpha - mc^2)\psi \rightarrow L_D = \bar{\psi}'(i\hbar c \gamma^\alpha D_\alpha - mc^2)\psi'$$

La invarianza de la forma ante una transformación gauge de fase local implica como hemos visto la existencia de un campo vectorial gauge A_α .

381

Interacción del campo electromagnético con la materia

Al efectuar la transformación gauge de fase local la lagrangiana se descompone es dos términos

$$L_D \rightarrow L_D + L_{Dm} = \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\alpha \partial_\alpha - mc^2)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi$$

El término L_{Dm} se puede asociar a la interacción entre la partícula cargada y el campo electromagnético en la lagrangiana

$$L_{int} = -q\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi$$

Si q se interpreta como la carga eléctrica, entonces está relacionado con la fuerza electrodinámica de Lorentz que determinan las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético generado por los potenciales gauge eléctrico y magnético $A^\alpha = (\phi, c\vec{A})$.

Los significados del campo electromagnético

Además de la lagrangiana de Dirac para el electrón L_D se debe considerar la lagrangiana correspondiente al campo electromagnético libre en el vacío L_c viene dado por

$$L_c = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

siendo $F_{\alpha\beta}$ el tensor electromagnético definido por

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}$$

Como ya hemos visto, $F_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico de dimensión 4 que depende solo de las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ y de inducción magnética $\vec{B}$.

Para que la lagrangiana total de una partícula con carga q que interacciona con un campo electromagnético tenga una simetría de forma que sea invariante ante una transformación gauge de fase local, debe ser de la forma $L = L_D + L_{Dm} + L_c$

$$L = \underbrace{\hbar c \bar{\psi} \left(i \gamma^\alpha D_\alpha - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi}_{\text{partícula libre}} + \underbrace{-q \bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi}_{\text{interacción e.m.}} + \underbrace{-\frac{\epsilon_0}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}_{\text{campo e.m. libre}}$$

La ecuación de Dirac es invariante ante el grupo de transformaciones de Poincaré.

Un hecho importante de la mecánica cuántica relativista de Dirac, es que la fuente que origina el campo de mediación de la interacción depende del propio campo ψ , a diferencia de la electrodinámica clásica que es un parámetro externo independiente en que la evolución del campo solo depende de las fuentes externas, por lo que la interacción relativista no es lineal.

Además en el caso de la ecuación de Dirac no existe el límite clásico cuando $\hbar \rightarrow 0$, ya que al ser la las cargas (electrones) fermiones las relaciones de conmutación no tienen en este caso un límite definido.

El que el principio gauge determine también la forma de las interacciones, está también relacionado con que el campo se pueda derivar de una lagrangiana por el principio de la acción estacionaria.

La variación de $L_c + L_{cm}$ con respecto a las variables de campo A_α reproduce las ecuaciones dinámicas de Maxwell

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{J_D^\beta}{c \epsilon_0}$$

siendo la densidad de corriente de carga

$$J_D^\beta = q c \bar{\psi} \gamma^\beta \psi$$

La corriente J_D^β es un vector propio con una densidad de probabilidad positiva. El acoplamiento del campo con las corrientes es una diferencia con las ecuaciones de la mecánica clásica, en que las fuentes de cargas y corrientes son externas e independientes del campo. Además, vemos que los potenciales A_α son la magnitud fundamental en la interacción, y que se acopla con el campo a través de la carga q , lo que hace que la interacción sea no lineal en mecánica cuántica. El principio de superposición clásico solo es válido si se desacopla el término de interacción como una fuente exterior, como se hace en la aproximación cero de la electrodinámica clásica. Las técnicas para el cálculo iterativo de la interacción llevan a los diagramas de Feynman de la electrodinámica cuántica que comentaremos más adelante.

Conservación local de la carga

La densidad de corriente de carga por su definición verifica también la ecuación de continuidad de la conservación de la carga local

$$\partial_\beta J_D^\beta = 0$$

Separando la parte espacial de la temporal

$$J_D^0 = c\rho = qc\bar{\psi}\gamma^0\psi$$

$$J_D^i = J^i = qc\bar{\psi}\gamma^i\psi$$

tendremos entonces la ecuación de conservación local de la carga en el espacio ordinario de tres dimensiones

$$\partial_\beta J^\beta = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} J = 0$$

Esto implica que la carga total es una constante que se conserva en el tiempo

$$Q_D = \int_{V_\infty} J_D^0 d^3x = \int_{V_\infty} qc\bar{\psi}\gamma^0\psi d^3x = C^{te} \quad y \quad \frac{dQ_D}{dt} = 0$$

Se debe distinguir entre la carga q que actúa como una constante de acoplamiento en las interacciones y Q_D que es carga total del sistema.

Que surjan juntos el potencial eléctrico y el potencial magnético tiene otras implicaciones profundas que analizaremos. Hemos de observar también que la ecuación de la conservación de la materia o de la carga $\partial_\beta J^\beta = 0$, tiene un carácter local que es una condición mucho más exigente que la mera condición de la conservación global. El que una simetría global sea también local, determina la forma de las interacciones y que se conserve la carga total.

La materia o la carga, no desaparece en un punto y a aparece en otro, si no que deber ser conservada localmente en cada punto del espacio. Así mismo ocurre con la energía, que está directamente relacionada con la masa.

Ya vimos que la condición de que ante una transformación gauge A^α se debe transformar como

$$A' = A - \vec{\nabla} \Lambda \quad y \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

deja el sistema físicamente invariante ya que el campo electromagnético no cambia

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B} \end{aligned}$$

Como es sabido por la electrodinámica clásica, escogiendo adecuadamente la transformación Λ se puede simplificar notablemente la resolución de los problemas electromagnéticos, como por ejemplo, el gauge de Coulomb con $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ para la radiación, o el gauge de Lorentz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, para la resolución de las ecuaciones integrales de Maxwell.

Por tanto, el requerimiento de la invarianza de la forma de la lagrangiana relativista de Dirac para un electrón ante una transformación de fase local de la función de ondas (transformación gauge), genera un campo vectorial (campo gauge electromagnético) que contrarresta la transformación, a través del cual las partículas interactúan con el campo mediante una constante de acoplamiento que es la carga eléctrica. La carga está discretizada en múltiplos de la carga e del electrón, y la constante de acoplamiento α de las interacciones es de baja intensidad

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

La carga puede ser positiva o negativa (bipolaridad) que contrasta con la positividad de la energía y de la masa, aunque todas ellas son magnitudes aditivas.

La estructura del propio campo gauge vectorial determina la conservación de la carga y la estructura del campo electromagnético (ecuaciones de Maxwell). También especifica cómo debe ser la interacción de dicho campo electromagnético con la materia cargada, lo que determina la dinámica de las partículas cargadas a través de la fuerza electrodinámica de Lorentz, así como se generan a su vez los campos por las cargas y las corrientes en movimiento, cerrando el proceso en un ciclo recursivo que no tiene una solución general explícita analítica y que se debe resolver mediante métodos de aproximación.

Simetrías gauge de la mecánica cuántica clásica como origen de las ecuaciones de Maxwell

Aunque la deducción anterior de las ecuaciones de Maxwell mediante la invarianza de forma de la ecuación relativista de Dirac ante una transformación gauge de fase local es completamente general, sin embargo también es posible derivar los mismos resultados a partir de la mecánica cuántica clásica de Schrödinger imponiendo solo la condición adicional de la invarianza de la forma. Este tipo de derivación estudiada en detalla por Kobe, es mas ilustrativa respecto a las implicaciones físicas de las transformaciones gauge, por lo que las comentaremos en detalle aunque requiera imponer condiciones adicionales.

La ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica para una partícula que se mueve en un potencial V viene dada por

$$\left(\frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

Si se hace una transformación gauge de primera clase correspondiente a un cambio de fase local en la función de ondas

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{x},t)}$$

donde q y c son constantes que luego fijaremos, y $\Lambda(\vec{x},t)$ es una función arbitraria de la posición y del tiempo.

La anterior ecuación de Schrödinger entonces se transforma entonces como

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{\nabla}\Lambda)^2\psi' + V\psi' - q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

Se toma como un principio general que la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada debe adoptar una forma estructural invariante cuando se hace una transformación gauge.

Esto solo es posible si se modifica la ecuación inicial de Schrödinger por la expresión

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

donde $\vec{A}$ y ϕ son los denominados habitualmente potencial vector magnético $\vec{A}$ y el potencial escalar eléctrico ϕ

$$A^\alpha = (\phi, c\vec{A})$$

Es fácil comprobar que cuando se hace la transformación gauge de fase local de primera clase, la ecuación de Schrödinger así definida adopta una forma invariante

$$\left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A})^2 + q\phi + V \right) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

si los potenciales se transforman según el gauge de segunda clase

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

que es similar a una transformación gauge en la electrodinámica clásica.

La introducción del potencial escalar y vectorial es lo que garantiza el principio de invarianza de la forma de la ecuación de Schrödinger ante una transformación de fase de primera clase.

Como las magnitudes físicas observables no pueden depender de una función arbitraria como es $\Lambda(\vec{x}, t)$ que define la transformación gauge, se define las magnitudes de campo

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

que como ya hemos visto son invariantes ante una transformación gauge de segunda clase y por tanto son observables.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \equiv \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi' = \vec{E}' \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{B}'\end{aligned}$$

Por la propia definición de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se desprende que verifican inmediatamente las ecuaciones cinemáticas de Maxwell, que en realidad son identidades.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La transformación gauge de primera clase está relacionada con la conservación de la carga. La densidad de probabilidad de encontrar una partícula en un punto del espacio viene dada por el módulo al cuadrado de la función de ondas

$$P = |\psi|^2 = \psi^* \psi$$

siendo por tanto

$$\int \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3\vec{x} = 1$$

Si al parámetro q le denominamos como la carga de la partícula, la densidad espacial de carga estará asociada con

$$\rho(\vec{x}, t) = q\psi^*(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t)$$

Si se diferencia la anterior ecuación se obtiene la ecuación de conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

donde la corriente viene definida por

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = q \text{Real}(\psi^*(\vec{x}, t) \hat{v} \psi(\vec{x}, t))$$

y $\hat{v}$ es el operador de velocidad

$$\hat{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$$

La ecuación de Schrödinger se puede escribir de la forma

$$\hat{H}(\vec{A}, \emptyset) \psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt}$$

siendo

$$\hat{H}(\vec{A}, \emptyset) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\emptyset + V$$

Si se hace una transformación gauge de fase de primera clase

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{x}, t)}$$

entonces $\psi^* \psi \equiv \psi'^* \psi'$ y la densidad de carga será un invariante observable.

$$\rho'(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t)$$

La densidad de corrientes también será un observable ya que no depende del gauge Λ de la transformación.

$$\vec{j}'(\vec{x}, t) = q \text{Re} \left(\psi'^* \frac{1}{m} (\vec{p} - q\vec{A}) \psi' \right) = q \text{Re} \left(\psi^* \frac{1}{m} (\vec{p} - q\vec{A}) \psi \right) = \vec{j}(\vec{x}, t)$$

El hamiltoniano $\hat{H}(\vec{A}, \emptyset)$ de la ecuación de Schrödinger no puede ser un observable ya que su valor depende de la función gauge $\Lambda(\vec{x}, t)$ empleada para la transformación de fase.

Sin embargo $\hat{H}(\vec{A}, 0)$ sin el potencial escalar, si tiene un valor invariante ya que es función solo de la derivada covariante que como ya hemos visto es gauge invariante al ser invariante la derivada covariante

$$D_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi + i \frac{q}{\hbar} A_\alpha \psi$$

Esto se debe a que $q\phi$ al ser dependiente del tiempo no se puede identificar con la energía potencial ya que la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ no procede del gradiente del potencial eléctrico al ser

$$q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Sin embargo, $H(\vec{A}, 0)$ si está asociado con el operador de energía y es un observable ya que su forma y valor es invariante ante una transformación gauge.

Si se define la densidad de energía de la partícula como

$$w_p = \text{Real} \psi^*(\vec{x}, t) \hat{H}(\vec{A}, 0) \psi(\vec{x}, t)$$

y se diferencia la anterior ecuación, teniendo en cuenta la ecuación de Schrödinger se obtiene la ecuación de conservación

$$\frac{\partial w_p}{\partial t} + \text{div} \vec{S}_p = w_j$$

donde $\vec{S}_p$ desempeña el papel de un flujo de energía definido por

$$\vec{S}_p = \frac{1}{2} \text{Real} [\hat{v} H(\vec{A}, 0) + \hat{H}(\vec{A}, 0) \hat{v}] - \frac{\hbar^2}{4mq} \vec{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

y w_j es un término fuente de energía

$$w_j = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

que representa la energía suministrada por el campo eléctrico $\vec{E}$ a la partícula cargada por unidad de tiempo, y que nos define también como la materia interacciona con el campo.

Por consiguiente, el campo eléctrico $\vec{E}$ actúa como una fuente de energía la cual es absorbida por la partícula cargada que actúa como un sumidero de energía.

Principio de los observables

Se considera como un principio general el que cualquier magnitud física será observable experimentalmente solo si es invariante tanto su forma estructural como el valor de su ecuación matemática ante una transformación gauge, de forma que preserve su valor.

Puesto que el campo electromagnético determinado por $\vec{E}$, $\vec{B}$ es un observable, debe tener asociado una energía que permita su detección experimentalmente cuando interacciona con la materia.

Según Kobe este principio de los observables condiciona como debe ser la estructura de las ecuaciones del campo electromagnético

como ya vimos en el capítulo de teorías dinámicas, para el campo electromagnético $\vec{E}$, $\vec{B}$, el único escalar observable para una densidad de energía que se puede formar que sea invariante en una transformación gauge es

$$w_c = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

y la única forma bilineal que se puede formar para el flujo de energía es

$$\vec{S}_c = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

La condición de invarianza en la forma de la ecuación de Schrödinger ante una transformación de fase de la función de ondas (gauge de primera clase) que implica la conservación local de la carga, nos lleva a tener que introducir un campo vectorial gauge $(\phi, c\vec{A})$ que se identifica con los potenciales electromagnéticos y que se transforman de acuerdo con una transformación gauge de segunda clase.

Esto nos lleva a la definición de dos magnitudes observables $\vec{E}$, $\vec{B}$ que se identifican con el campo eléctrico y magnético que son función de los potenciales, que son invariantes ante las transformaciones gauge de segunda clase.

De la propia definición de $\vec{E}$, $\vec{B}$ en función de $(\phi, c\vec{A})$, se obtiene como identidades las ecuaciones cinemáticas de Maxwell de la ley de Faraday y de la ausencia de monopolos.

Del principio de conservación local de la energía se deducen las ecuaciones dinámicas de Maxwell de la ley de Gauss y de la ley de Ampère.

Además, se obtiene que el acoplamiento del campo electromagnético con la materia cargada es a través del término $\vec{E} \cdot \vec{j}$, determina la densidad local de energía por unidad de tiempo transferida del campo a la materia cargada.

La energía total del campo y de la materia se conserva localmente de forma que se cumple la ecuación local de la conservación total de la energía

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = 0$$

Es de observar que, para obtener ρ y $\vec{j}$ que dependen de la función de ondas ψ , es necesario resolver la ecuación de Dirac o Schrödinger que a su vez depende de los potenciales electromagnéticos $(\phi, c\vec{A})$, por lo que la ecuación de Dirac o Schrödinger y las ecuaciones de Maxwell están acopladas de forma no lineal.

En la electrodinámica clásica el tratamiento se simplifica haciendo en primer orden ρ y $\vec{j}$ iguales a la densidad de carga y corrientes macroscópicas considerándolas como fuentes externa. Las correcciones de orden superior se tratan con el método desarrollado por Feynman para la electrodinámica cuántica.

Simetrías gauge de la mecánica clásica como origen de las ecuaciones de Maxwell. Principio de la invarianza de la forma de la lagrangiana

Las ecuaciones de Maxwell se pueden deducir también a partir de la electrodinámica clásica, imponiendo la invarianza de forma de la lagrangiana ante una transformación gauge de fase local y la condición adicional de la conservación local de la energía. Este tipo de derivación estudiada en detalla por Kobe, es ilustrativa respecto a las implicaciones físicas de las transformaciones gauge por las condiciones adicionales que se deben postular.

Para una partícula libre clásica hemos visto que la lagrangiana viene definida por

$$L_m = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x})$$

y la acción será entre dos puntos fijos de una trayectoria será

$$S_m = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} L_m dt$$

La variación de la acción $\delta S_p = 0$ nos reproduce a partir ecuaciones de Euler-Lagrange la ecuación de la ley de Newton

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x})$$

Como hemos visto, la variación de la acción es invariante si se le añade a la Lagrangiana una diferencial total, que no contribuye a la variación.

Por ello podemos escribir

$$\begin{aligned} L_m &= L_m + q \frac{d\Lambda(\vec{x}, t)}{dt} \\ S_m &= S_m + q(\Lambda(\vec{x}_1, t_1) - \Lambda(\vec{x}_2, t_2)) \end{aligned}$$

Una partícula con carga q que genera una corriente $\vec{j}$ puede representarse como una distribución mediante la delta de Dirac de la forma

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= q \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= q \frac{d\vec{x}}{dt} \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \end{aligned}$$

donde $\vec{x}(t)$ representa la trayectoria de la partícula

Puesto que

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \Lambda$$

La lagrangiana puede reescribirse entonces de la forma

$$L_m = L_m + \int (\vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t}) d^3 \vec{x}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que ρ y $\vec{j}$ son nulos en el infinito obtenemos

$$L_m = L_m + \int \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) \Lambda(\vec{x}, t) d^3 \vec{x} + \frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) \Lambda(\vec{x}, t) d^3 \vec{x}$$

y puesto que Λ es una función arbitraria, para que la variación de la acción sea invariante debe verificarse la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} \equiv 0$$

que representa la ecuación de continuidad de la conservación local de la carga, y que integrada nos indica también que la carga total es constante.

No solo la acción es invariante cuando se añade una diferencial total a la lagrangiana, sino que también se considera como un principio general que lagrangiana debe adoptar la misma forma estructural, lo que garantiza que las ecuaciones adopten siempre la misma forma.

La lagrangiana para la materia cargada adopta la forma general

$$L_m = L_m + \int \left(\vec{J}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) d^3 \vec{x}$$

y para que su forma sea invariante L_p debe ser modificada añadiéndole un término de la forma

$$L_i = \int \left(\vec{J}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \rho(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) \right) d^3 \vec{x}$$

que se puede interpretar como la interacción del campo con la materia a través de unos potenciales.

La lagrangiana clásica para una carga viene entonces dada por la expresión

$$L_{mi} = L_m + L_i$$

La variación de la acción es invariante si se le añade una diferencial total a L_{mi} que no afecta a las ecuaciones de movimiento

$$L_{mi} = L_m + L_i + q \frac{d\Lambda}{dt} = L_m + \int \left(\vec{J}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \rho(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) \right) d^3 \vec{x}$$

y la lagrangiana L_{mi} tendrá una forma invariante si los potenciales se transforman como un gauge de segunda clase

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

El campo vectorial gauge $(\phi, c\vec{A})$ compensa la diferencial total de Λ haciendo que la lagrangiana tenga una forma invariante cuando se transforman como una transformación gauge de segunda clase.

La variación de la acción

$$\delta S_{mi} = \delta \int_{x_1}^{x_2} L_p dt$$

respecto a de las coordenadas x^i nos reproduce de las ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) + q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Las ecuaciones de movimiento de una carga en un campo electromagnético son invariantes en forma en una transformación gauge de segunda clase, ya que toman la expresión equivalente

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) + q \left(-\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \right) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}'$$

Por esta razón, se definen las magnitudes de campo gauge invariantes

$$\begin{aligned} \vec{E} &\stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \equiv -\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}' \\ \vec{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{B}' \end{aligned}$$

que son unos observables al ser invariantes en una transformación gauge de segunda clase.

De esta forma la ecuación de movimiento se puede reescribir en función de los observables $\vec{E}$ y $\vec{B}$ como

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) + q(\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B})$$

lo que reproduce la fuerza de Lorentz de la electrodinámica clásica

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B})$$

De la propia definición de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función de los potenciales se obtiene directamente como identidades las ecuaciones cinemáticas de Maxwell de la ley de Faraday y la ley de ausencia de polos magnéticos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv 0$$

Para determinar cómo es afectado el campo electromagnético definido por $\vec{E}$ y $\vec{B}$ por la materia representada por cargas y corrientes, como ya vimos es necesario introducir la lagrangiana del campo electromagnético y hacer la variación a las variables de campo que en este caso son las componentes de los potenciales electromagnéticos.

La lagrangiana del campo electromagnético siguiendo a Kobe, suponemos que inicialmente viene dada por una expresión de la forma

$$L_c = \int (C_e \vec{E}^2 + C_b \vec{B}^2 + C_{eb} \vec{E} \cdot \vec{B}) d^3\vec{x}$$

La lagrangiana general de una partícula cargada no relativista en un campo electromagnético con el que interactúa viene dada por

$$L = L_c + L_m + L_i$$

Haciendo nula la variación de la acción de L respecto a las variables de campo de las componentes de los potenciales ϕ y A^i

$$\delta S = \delta \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} L dt = 0$$

obtenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen para la variación respecto a la variable de campo ϕ

$$2C_e \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - C_{eb} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho$$

y para la variación respecto a la variable de campo A^i

$$2C_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} + 2C_b \vec{\nabla} \times \vec{B} = -C_{eb} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0$$

Las dos anteriores ecuaciones reproducen la ley de Gauss y la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2C_e} \rho$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{2C_b} \vec{J} + \frac{C_e}{C_b} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Las constantes C_e y C_b dependen del sistema de unidades escogido. Para que existan ondas electromagnéticas que se propaguen con velocidad c se debe cumplir además con la relación

$$c^2 = \frac{C_b}{C_e}$$

Como vimos en el capítulo de teorías dinámicas, esto es equivalente también a exigir la conservación local de la energía.

Para el sistema internacional de medidas serán

$$2C_e = \epsilon_0 \quad \text{y} \quad 2C_b = -1/\mu_0$$

Que debe ser $C_{eb} = 0$ se desprende que $\vec{E}$ es un vector polar y $\vec{B}$ es un pseudovector axial, por lo que su producto no puede aparecer en la lagrangiana ya que es su

producto sería un pseudoescalar y no sería invariante ante la inversión de los ejes coordenados.

Puesto que tanto $L_c + L_i$ es invariante ante una transformación gauge de segunda clase, las ecuaciones dinámicas de Maxwell (leyes de Gauss y de Ampère) serán también invariantes ante la misma transformación.

Interrelación de las simetrías de la mecánica clásica y cuántica en el origen de las ecuaciones de Maxwell. Integrales de camino de Feynman

Hemos visto que las ecuaciones de Maxwell pueden deducirse tanto a partir de la mecánica clásica como de la mecánica cuántica no relativista imponiendo ciertas simetrías de invarianza de forma a la lagrangiana y alguna condición adicional, como la conservación local de la energía o la invarianza de valor exigido por el principio de los observables dependiendo de la teoría de se parte.

Koba da una explicación simple de porque estas dos teorías dan la misma predicción para las ecuaciones de Maxwell basándose en formulación de la mecánica cuántica clásica a partir las integrales de camino de Feynman como un límite de la mecánica clásica cuando $\hbar/m \rightarrow 0$.

La evolución de la función de estado cuántica según Feynman viene dada por

$$\psi(\vec{x}, t) = \int K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \psi(\vec{x}', t') d^3 \vec{x}'$$

siendo $K(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ el propagador del punto $\vec{x}, t$ a $\vec{x}', t'$ que viene definido por

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t L[\vec{x}(t), \vec{v}(t), t] dt} \mathcal{D}^3 \vec{x}$$

Donde por $\mathcal{D}^3 \vec{x}$ se entiende que un sumatorio a la integral de todos los caminos posible entre $(\vec{x}(t), t)$ y $(\vec{x}'(t'), t')$, y $L[\vec{x}(t), \vec{v}(t), t]$ es la lagrangiana de una partícula de carga q

$$L[\vec{x}(t), \vec{v}(t), t] = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) - q\phi(\vec{x}, t) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)$$

Si se hace la transformación gauge

$$L \rightarrow L' = L + q \frac{d\Lambda}{dt}$$

hemos visto que la lagrangiana tiene una forma estructural invariante

$$L \rightarrow L' = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) - q\phi'(\vec{x}, t) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}'(\vec{x}, t)$$

con la condición de que ϕ y $\vec{A}$ se transforman según como un gauge de segunda clase

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Puesto que

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}\Lambda$$

el Kernel se transformará entonces de la forma

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') e^{-\frac{q}{\hbar}(\Lambda(\vec{x}, t) - \Lambda(\vec{x}', t'))}$$

con lo que función de ondas se transformará como una forma invariante

$$\psi'(\vec{x}, t) = \int K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \psi(\vec{x}', t') d^3\vec{x}'$$

si

$$\psi'(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}, t)}$$

lo que corresponde con una transformación de fase gauge de primera clase.

Si se toma un tiempo t infinitamente próximo a t' , $t = t' + \varepsilon$ siendo $\varepsilon/t' \ll 1$, se puede desarrollar el Kernel en serie de Taylor, y se demuestra que la función de ondas verificará también la ecuación la ecuación de ondas de Schrödinger

$$\left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

la cual como ya hemos visto es invariante en su forma ante una transforman gauge de fase de segunda clase

$$\left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A}')^2 + q\phi' + V \right) \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}$$

En límite de la mecánica clásica cuando $\hbar/m \rightarrow 0$, a la integral de Feynman para el Kernel solo contribuye el camino que hace estacionaria la fase, que corresponde a

$$\delta \int_t^t L[\vec{x}(t'), \vec{v}(t'), t'] dt' = 0$$

lo que nos reproduce la ley de Newton con la fuerza de Lorentz de la electrodinámica clásica

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) + q(\vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B})$$

siendo

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

y que como ya hemos visto son magnitudes vectoriales gauge invariantes en su forma y valor y por tanto son observables.

Simetrías gauge de la formulación hamiltoniana como origen de las ecuaciones de Maxwell

Ya hemos visto en el capítulo de las teorías canónicas, que las ecuaciones de Maxwell se pueden deducir también a partir de la de la formulación hamiltoniana, al ser una formulación equivalente a la lagrangiana.

Sin embargo, la formulación hamiltoniana permite profundizar más en detalle sobre algunos aspectos de la estructura de las ecuaciones de Maxwell.

La lagrangiana para una partícula en un campo magnético viene dada por

$$\begin{aligned} L_{mi} = & \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) - \int \left(\vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \rho(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) \right) d^3 \vec{x} \\ & + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x} \end{aligned}$$

El momento canónico conjugado $\vec{p}$ de la variable de posición $\vec{x}$ viene definido por

$$\vec{p} = \frac{\partial L_{mi}}{\partial \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)} = m\vec{x} + q\vec{A}$$

De igual forma el momento canónico $\vec{\Pi}_{\vec{A}}$ de la variable de campo $\vec{A}$ se define por

$$\vec{\Pi}_{\vec{A}} = \frac{\delta L_{mi}}{\delta \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)} = -\epsilon_0 \vec{E}$$

y para el potencial escalar de la misma forma

$$\Pi_{\phi} = \frac{\delta L_{mi}}{\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \equiv 0$$

donde δ representa la derivada funcional.

Al ser $\Pi_{\phi} \equiv 0$, vimos que esto nos indica que ϕ no es realmente una variable dinámica. Además al ser

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi, t} \equiv 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = -\rho + \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \equiv 0$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange para el potencial ϕ no son ecuaciones dinámicas, y que la ley de Gauss es más bien una restricción a la distribución espacial del potencial que se debe aplicar a todos instantes del tiempo.

El hamiltoniano del sistema total se define por

$$H = \int \left(\vec{\Pi}_{\vec{A}} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \Pi_{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) d^3\vec{x} + \vec{p} \cdot \vec{x} - L$$

Sustituyendo los momentos por sus expresiones explícitas resulta

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi + V + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3\vec{x} + \int \phi (\rho - \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}) d^3\vec{x}$$

Las ecuaciones de Hamilton para el movimiento para la partícula son

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m} (\vec{p} - q\vec{A}) \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \end{aligned}$$

siendo esta última la ecuación dinámica

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) + q(\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B})$$

con la definición de

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

por lo que se reproduce la ecuación movimiento de Newton con la fuerza de Lorentz actuando sobre la partícula cargada.

De la definición propia de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se deduce de forma inmediata como una identidad las ecuaciones cinemáticas de Maxwell de la ley de Faraday y de la ley de ausencia de polos magnéticos.

Las ecuaciones dinámicas de Maxwell se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton para las variable de campo que vienen dadas por

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \left(\frac{d\vec{\Pi}}{dt} \right)} = -\vec{E} - \vec{\nabla}\phi$$

que es equivalente a la ecuación ya antes obtenida

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Las otra ecuaciones de Hamilton de movimiento vienen dadas por

$$\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)} = -c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + \vec{J}$$

que es equivalente a la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial \Pi_\phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = -\rho - \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E} \equiv 0$$

que es equivalente a la ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Al ser $\Pi_\phi \equiv 0$ carece de sentido la ecuación de Hamilton

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \left(\frac{d\Pi_\phi}{dt} \right)} \equiv 0$$

Puesto que $\Pi_\phi \equiv 0$, esto nos indica otra vez que ϕ no es realmente una variable dinámica. Además $\partial \Pi_\phi / \partial t \equiv 0$ que es la ley de Gauss, nos indica que Π_ϕ tampoco es una variable dinámica, y que la ecuación de Gauss es una restricción.

Como ya hemos comentado, el que la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ no contenga la variable $\phi_{,t}$ y sea $\partial \mathcal{L} / \partial \phi_{,t} \equiv 0$ indica que ϕ no es una variable dinámica o de propagación, y su inclusión en el sistema es más bien una restricción, que es la que da origen a la aparición del gauge electromagnético en los potenciales.

El problema de la separación de energías en las interacciones electromagnéticas

Hemos visto que para un sistema aislado de partículas cargadas en un campo electromagnético la energía total se conserva, habiendo un intercambio de energía entre las partículas y el campo.

Sin embargo, la separación entre la energía del campo y la de las partículas no está unívocamente definida, y además, como ya vimos, solo es ello posible para partículas no relativistas.

Cuando hay varias partículas cargadas, solo en la aproximación no relativista cuasiestática se puede considerar que interaccionan entre ellas a través del campo electromagnético y se les puede asociar una energía potencial. Las partículas en esta aproximación, deben moverse tan lentamente que la energía radiada es despreciable en el tiempo de escala en que las partículas se mueven.

La energía total $\mathcal{E}$ del campo electromagnético y una partícula con carga eléctrica viene dada por

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + U(\vec{x}) + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3\vec{x}$$

donde $U(\vec{x})$ incluye la posible energía de un potencial externo constante en el tiempo.

De acuerdo con la teoría de Maxwell, la energía que pierde el campo electromagnético se transfiere a la partícula mediante la ecuación

$$\frac{d}{dt} \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3\vec{x} = - \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \equiv - \int \vec{J} \cdot \vec{E} d^3\vec{x}$$

lo que implica la conservación total de la energía

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

La separación de la energía $\mathcal{E}$ entre las partículas $\mathcal{E}_p$ y el campo $\mathcal{W}_c$ se puede hacer a través de término de energía de acoplamiento V

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \mathcal{E}_p + V = \sum_r \frac{m_r}{2} \left(\frac{d\vec{x}_r}{dt} \right)^2 + U + V$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_c = \mathcal{W}_c - V = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3\vec{x} - V$$

de forma que sea constante la energía total

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}_p + \tilde{\mathcal{W}}_c = \mathcal{E}_p + \mathcal{W}_c = \mathcal{E}^{\text{te}}$$

Una condición que se debe imponer a la energía potencial V que se asocie a las partículas, es que debe ser un observable invariante en su valor ante una transformación gauge de segunda clase.

La separación de la energía es útil cuando uno de los subsistemas permanece como condiciones fijas en las que el otro subsistema evoluciona dinámicamente. Veremos a continuación distintas formas de separación de la energía.

Invarianza gauge de las componentes longitudinales y transversales del campo electromagnético

Hemos visto en el capítulo de teorías vectoriales, que según el teorema de Helmholtz podemos hacer la descomposición en componentes longitudinales y transversales de las magnitudes del campo electromagnético

$$\begin{aligned} \vec{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{A}_L + \vec{A}_T = -\vec{\nabla}\phi_A + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_A \\ \vec{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{E}_L + \vec{E}_T = -\vec{\nabla}\phi_L + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_E \end{aligned}$$

En función de los potenciales electromagnéticos las componentes toman la expresión

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{E}_L = -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}\phi_L$$

habiéndose definido

$$\phi_L \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \phi_{\vec{A}}}{\partial t} + \phi$$

A veces a ϕ_L se le denomina como $\phi_{\vec{E}} \equiv \phi_L$, que utilizaremos indistintamente según la conveniencia de la notación. También se deben cumplir las identidades

$$\vec{A}_{\vec{E}} \equiv -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \phi_T \equiv -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t}$$

También se define ϕ_T como

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi_T$$

por lo que será

$$\vec{\nabla} \phi_T \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t}$$

Es importante observar, que al ser

$$\vec{E} = \vec{E}_T + \vec{E}_L = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi_L$$

la indeterminación gauge procede solo de $\vec{A}_T$ y ϕ_L . Esto muestra también que las ecuaciones de la electrodinámica son invariantes si reemplazamos $\vec{A} \rightarrow \vec{A}_T$ y $\phi \rightarrow \phi_L$.

Por la ley de Gauss se verificará

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L = -\nabla^2 \phi_L$$

que es una ecuación de Poisson cuya solución para cargas puntuales viene dada por potencial eléctrico de interacción estático

$$\phi_L(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \sum_r \frac{q_r}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_r|}$$

Observemos que ϕ_L es gauge invariante, pero no lo es $\phi_T = \phi - \phi_L$ ya que se transforma como

$$\phi_T \rightarrow \phi'_T = \phi_T - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Sin embargo $\vec{E}_T$ y $\vec{E}_L$ son gauge invariantes y por tanto son magnitudes observables.

Observemos que ϕ_L es el potencial de Coulomb instantáneo generado por la distribución de cargas ρ , por lo que $\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi_L$ es el campo eléctrico ligado a la posición instantánea de dichas cargas, y que un campo no local

$$\vec{E}_L(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \phi_L = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t)(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$

En el capítulo de teorías vectoriales también vimos que las corriente se descomponen en su parte longitudinal y transversal de la forma

$$\begin{aligned} \vec{J}_L &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi_L \\ \vec{J}_T &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

y que el campo eléctrico toma la expresión integral en función de las fuentes

$$\begin{aligned} \vec{E}_L &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \rho(\vec{x}', (t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{J}_T(\vec{x}', (t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ \vec{E}_T &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{J}_T(\vec{x}', (t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

De las identidades

$$\begin{aligned} \int \vec{E}^2 d^3\vec{x} &= \int \vec{E}_T^2 d^3\vec{x} + \int \vec{E}_L^2 d^3\vec{x} + \int \vec{E}_L \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} \\ \int \vec{E}_T \cdot \vec{E}_L d^3\vec{x} &= - \int \vec{\nabla} \phi_L \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} \\ &= \int \vec{\nabla} \cdot (\phi_L \vec{E}_T) d^3\vec{x} + \int \phi_L \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} \equiv 0 \\ \int \vec{E}_L^2 d^3\vec{x} &= \int (\vec{\nabla} \phi_L)^2 d^3\vec{x} = \int \vec{\nabla} \cdot (\phi_L \vec{\nabla} \phi_L) d^3\vec{x} - \int \phi_L \nabla^2 \phi_L d^3\vec{x} = \int \frac{\rho \phi_L}{\epsilon_0} d^3\vec{x} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3\vec{x} \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}_T^2 d^3\vec{x} + V_C$$

donde V_C es la energía potencial de Coulomb instantánea

$$V_C = \int \frac{\rho \phi_L}{\epsilon_0} d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{r,l} \frac{q_r q_l}{|\vec{x}_r - \vec{x}_l|}$$

y el sumatorio se extiende a todas las posiciones distintas de las partículas.

Energía potencial de Coulomb y componentes longitudinales y transversales de la energía de interacción cuasiestática no relativista

Un método de separación de las energías es escoger V_C como la energía potencial asociada a las partículas. Puesto que V_C supone una interacción instantánea esto solo es aplicable a partículas no relativistas en la aproximación cuasiestática.

Evidentemente la fuerza $F(\vec{x}_k)$ que actúa sobre la partícula situada en $\vec{x}_k$ sera

$$\vec{F}(\vec{x}_k) = q \vec{E}_L(\vec{x}_k) = -\frac{\partial V_C}{\partial \vec{x}_k}$$

Tomando para la descomposición de energías $V \equiv V_C$ entonces será

$$\tilde{\mathcal{W}}_c = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x} - V_C = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}_T^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x}$$

Puesto que la energía radiada originada por el movimiento de las cargas es despreciable, $\vec{E}_T$ es el campo que una carga de prueba experimentaría si todas las partículas fueran eliminadas del sistema, y correspondería entonces con el campo eléctrico de radiación externo, ya que la energía del campo eléctrico longitudinal está asociada a la interacción instantánea de Coulomb de las cargas.

La variación de la energía del campo electromagnético en este caso viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c}{dt} &= \int_V \epsilon_0 \left(\vec{E}_T \cdot \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} + c^2 \vec{B}_T \cdot \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} \right) d^3 x \\ &= \int_{V_\infty} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_T \cdot \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} - \vec{E}_T \cdot \vec{j}_T - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_T \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_T \right) d^3 x \end{aligned}$$

obteniéndose finalmente

$$\frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c}{dt} = -q \vec{v} \cdot \vec{E}_T - \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial V} (\vec{E}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

que es la expresión de la conservación de la energía para las componentes transversales, y que como hemos comentado en teorías vectoriales, $\vec{E}_T$ está asociada a la parte propagante de la radiación que contribuye al balance de energía.

Evidentemente se puede considerar una parte no de energía del campo no propagante $\tilde{\mathcal{W}}_{em}^L$ como asociada a la componente longitudinal

$$\tilde{\mathcal{W}}_c^L = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E}_L^2 d^3x = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \phi_L d^3x = q\phi_L$$

Por lo será

$$\frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c^L}{dt} = \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_T \cdot \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} d^3x = \int_V \vec{E}_L \cdot \vec{j}_L d^3x = -q\vec{v} \cdot \vec{E}_L$$

Por lo que en volumen V se verifica el balance de energía

$$\frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c}{dt} + \frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c^L}{dt} = - \int \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} - \frac{1}{\mu_0} \int_V (\vec{E}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

La energía de las partículas que es gauge invariante y vendrá dada por

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \mathcal{E}_p + V_c = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + U(\vec{x}) + V_c$$

Su variación con el tiempo vendrá dada por

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}_p}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} + \frac{dV_c}{dt} \equiv \int \vec{j} \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} = q\vec{v} \cdot \vec{E}_T$$

es decir, las partículas en el caso no relativista adquieren energía a partir del campo eléctrico transversal $\vec{E}_T$ de la radiación externa, manteniéndose la energía total siempre constante.

La lagrangiana de una partícula en un campo de radiación externo viene dada por

$$L_p = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - U - V_c + \int (\vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \rho(\vec{x}, t)\phi_T(\vec{x}, t)) d^3\vec{x}$$

Un sistema de partículas cargadas se puede representar como

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_k q_k \delta(\vec{x} - \vec{x}_k(t))$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_k q_k \frac{d\vec{x}_k}{dt} \delta(\vec{x} - \vec{x}_k(t))$$

donde $\vec{x}_k(t)$ es la trayectoria de la partícula k y q_k es su carga.

La variación de la acción respecto de las coordenadas de posición nos da para las ecuaciones de Euler-Lagrange la ecuación de movimiento de Newton para la fuerza de electrodinámica de Lorentz

$$m_k \frac{d^2 \vec{x}_k}{dt^2} = q_k (\vec{E}_T + q\vec{v} \wedge \vec{B})_k - \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_k} - \frac{\partial V_c}{\partial \vec{x}_k} \equiv q_k (\vec{E}_T + q\vec{v} \wedge \vec{B})_k - \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_k}$$

La hamiltoniana asociada a las partículas en el campo de radiación viene en este caso dada por

$$\begin{aligned} H_p(\vec{A}, \phi_T) &= \sum_k \left(\vec{p}_k \cdot \frac{d\vec{x}_k}{dt} - L_p \right) \\ &= \sum_k \left[\frac{1}{2m_k} \left(\vec{p}_k - q_k \vec{A}(\vec{x}_k, t) \right)^2 + q_k \phi_T(\vec{x}_k, t) \right] + U + V_c \end{aligned}$$

Es importante observar que H_p es un invariante en forma ante una transformación gauge pero su valor cambia dependiendo del gauge por lo que no puede ser un observable. Esto hace que no coincida con la energía $\mathcal{E}_p$.

Por tanto, $q\phi_T$ no puede ser asociado a una energía potencial ya que si varía con el tiempo su gradiente no puede ser asociado con la fuerza eléctrica $q\vec{E}_T$ al ser

$$q\nabla\phi_T = q\vec{E}_T + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \equiv -q\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t}$$

Existe, por tanto, una distinción entre el hamiltoniano y la energía debida a la variación con el tiempo del campo de radiación externo. La diferencia es debida a los potenciales ϕ_T .

Si se resta la energía de los potenciales externos al hamiltoniano de las partículas

$$\tilde{\mathcal{E}}_p \equiv H_p - \sum_k q_k \phi_T(\vec{x}_k, t)$$

se comprueba fácilmente que $\tilde{\mathcal{E}}_p$ es un observable ya que es invariante en su forma y valor en una transformación gauge de segunda clase.

Gauge dipolar eléctrico

En base a todo lo anterior, Kobe argumenta que el hamiltoniano que se debe considerar asociado a las partículas es

$$\tilde{H}_p \equiv H_p - \sum_k q_k \phi_T(\vec{x}_k, t)$$

En el caso de partículas no relativistas es posible separar la parte de energía del campo electromagnético del de las partículas, y el campo eléctrico externo puede ser considerado puramente longitudinal con una energía potencial asociada a la interacción de Coulomb instantánea.

Esta distinción es importante en mecánica cuántica como veremos en los procesos de radiación de los átomos.

Según Kobe en mecánica cuántica no relativista el operador de energía que se debe considerar para una partícula cargada es

$$\tilde{H}_p = H(\vec{A}, 0) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + U + V_c$$

que es realmente un observable al ser tanto en forma como en valor invariante ante una transformación gauge de segunda clase.

Si se toma el gauge el gauge denominado dipolar en que el potencial vector se anula

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda \equiv 0$$

tendremos que

$$\Lambda(\vec{x}, t) = \int_0^{\vec{x}} \vec{A} \cdot d\vec{x} + \Lambda(\vec{0}, t) \quad y$$

$$\phi'_T = - \int_0^{\vec{x}} \vec{E}_T \cdot d\vec{x} = \int_0^{\vec{x}} \left(\vec{\nabla} \phi_T + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{x} = \phi_T + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \phi_T(\vec{0}, t) - \frac{\partial \Lambda(\vec{0}, t)}{\partial t}$$

con la condición inicial

$$\frac{\partial \Lambda(\vec{0}, t)}{\partial t} + \phi_T(\vec{0}, t) = 0$$

Entonces el hamiltoniano para la partícula adopta la forma

$$\tilde{H}_p(\vec{A}', \phi'_T) = \frac{1}{2m} (\vec{p})^2 + U + V_c - q \int_0^{\vec{x}} \vec{E}_T \cdot d\vec{x}$$

Si se supone que la variación del campo eléctrico es pequeña en distancias del orden del tamaño de un átomo como ocurre con las longitudes de onda ópticas, se puede aproximar el hamiltoniano por la aproximación dipolar

$$H_p(\vec{A}, \vec{\phi}_T) \approx \frac{1}{2m} (\vec{p})^2 + U + V_C - q\vec{E}_T \cdot \vec{x}$$

Veremos que esta aproximación nos permitirá calcular la radiación emitida y absorbida por un átomo en primer orden de perturbaciones y que según Kobe es el hamiltoniano correcto para su tratamiento.

Transformaciones canónicas como origen de las ecuaciones de Maxwell

Hemos visto que el principio de invarianza de la forma de la lagrangiana ante una transformación gauge restringe sus formas posibles e introduce la existencia de un campo gauge vectorial que interacciona con las partículas cargadas de forma que compensa los efectos de la transformación para mantener la invarianza de la forma.

El campo electromagnético es un observable que tiene su origen en el campo vectorial gauge.

Hemos visto también que la invarianza de la forma de lagrangiana conduce a la invarianza de las ecuaciones de Hamilton ante transformaciones gauge, lo que justifica porque en la mecánica cuántica y en la mecánica clásica permanecen válidos los mismos principios de la teoría de los observables.

La invarianza de las ecuaciones de Hamilton está relacionada en mecánica con las transformaciones canónicas. Veremos que una transformación gauge de segunda clase no es más que una transformación canónica.

Para una partícula en un campo electromagnético hemos visto que la lagrangiana viene dada por

$$L(\vec{x}(t), \vec{v}(t), t) = L_m + L_{mi} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - U(\vec{x}) - q\phi(\vec{x}, t) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)$$

El momento canónico asociado con la posición es

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)} = m\vec{x} + q\vec{A}$$

y el hamiltoniano total

$$H = \vec{p} \cdot \vec{x} - L = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi(\vec{x}, t) + U$$

Una transformación gauge de segunda clase conservará la forma estructural de la lagrangiana

$$L' = L + q \frac{d\Lambda(\vec{x}, t)}{dt} \equiv \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) - q\phi'(\vec{x}, t) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}'(\vec{x}, t)$$

si ϕ y $\vec{A}$ se transforman según como un gauge de segunda clase

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad \text{y} \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

Por tanto se verificará

$$\vec{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)} = m \frac{d\vec{x}}{dt} + q\vec{A}' = \vec{p} + q\vec{\nabla}\Lambda$$

y también

$$H' = \vec{p}' \cdot \vec{x} - L' = \frac{1}{2m} (\vec{p}' - q\vec{A}')^2 + q\phi'(\vec{x}, t) + U$$

Una transformación canónica se define como aquella que conserva la forma de las ecuaciones de Hamilton.

Al pasar de $(\vec{x}, \vec{p})$ a $(\vec{x}', \vec{p}')$ las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

deben mantener la misma forma invariante

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} \quad \frac{d\vec{p}'}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial \vec{x}'}$$

lo que implica que debe ser

$$\vec{p}' \cdot \vec{x} - H' = \vec{p} \cdot \vec{x} - H - \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$

donde $\mathcal{F}$ es una función generatriz arbitraria.

Los significados del campo electromagnético

Desarrollando las derivadas totales, la anterior ecuación se puede escribir también como

$$\left(\vec{p} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{x}}\right) \cdot d\vec{x} + \left(-\vec{p} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{x}}\right) \cdot d\vec{x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p} + \left(H - H - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right) dt = 0$$

Una condición suficiente se cumpla esta ecuación es que se verifique las relaciones

$$H' = H + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$
$$\mathcal{F} = -\vec{p} \cdot \vec{x} + \vec{p} \cdot \vec{x} - q\Lambda(\vec{x}, t)$$

En particular la transformación canónica

$$\vec{x}' = \vec{x} \quad \text{y} \quad \vec{p}' = \vec{p} + q\vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}, t)$$

es equivalente a las transformaciones gauge ya analizadas las cuales conservan invariante también la forma estructural del hamiltoniano.

Como ya hemos visto, las ecuaciones dinámicas de movimiento de Newton para la fuerza de Lorentz se obtienen directamente de las ecuaciones de Hamilton, y por ser la transformación gauge una transformación canónica su forma se mantendrá también invariante.

Gauge de Lorentz y de Coulomb

Las ecuaciones dinámicas de Maxwell en función de los potenciales

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

adoptan la expresión

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\right) \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi\right) = -\mu_0 \vec{j}$$
$$\nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{A} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

Los potenciales están indeterminados, ya que el campo electromagnético queda inalterado por el cambio

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \quad \text{y} \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Si se elige Λ de forma que se verifique el gauge de Lorentz

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

los potenciales verificarán entonces las ecuaciones no homogéneas

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Una de las ventajas del gauge de Lorentz es que adopta una forma covariante

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

y además las ecuaciones de los potenciales son también covariantes

$$\frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} = \frac{J^\beta}{c\epsilon_0}$$

Sin embargo, el gauge de Lorentz tiene el inconveniente de que no elimina toda la libertad gauge, ya que todavía podemos hacer la transformación $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + Y$ que deja invariante las ecuaciones si el gauge residual verifica la ecuación de ondas homogénea

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} = 0$$

Otro hecho importante a observar es que las ecuaciones de campo para el gauge de Lorentz ya no contienen la ecuación de la conservación de la carga en ellas, y se debe postular como una ecuación independiente adicional.

Si se elige Λ de forma que se verifique el gauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, entonces será $\vec{A} = \vec{A}_T$ y el potencial vector es puramente transversal. El gauge de Coulomb es muy utilizado en los problemas de radiación, y las ecuaciones de los potenciales toman entonces las expresiones

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}_T - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}_T \\ \nabla^2 \phi_L &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

donde $\vec{J}_T$ es la componente transversal o solenoidal de la corriente. La corriente $\vec{J}$ siempre se puede descomponer en una componente transversal y otra longitudinal

$$\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_L$$

de forma que se verifique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J}_L = 0$$

Obsérvese que ϕ_L corresponde al potencial de Coulomb que depende de la posición instantánea de las cargas.

El campo eléctrico vendrá dado en este caso por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_L + \vec{E}_T & \vec{E}_L &= -\vec{\nabla}\phi_L & \vec{E}_T &= -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{B}_T = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T\end{aligned}$$

El gauge de Coulomb tiene la desventaja de que las ecuaciones de los potenciales no son covariantes. Tampoco elimina toda la libertad gauge, ya que podemos todavía la transformación $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \Upsilon(x^i)$ que deja invariante la ecuaciones si el gauge residual verifica la ecuación de ondas homogénea.

$$\nabla^2 \Upsilon(\vec{x}) = 0$$

Gauge cinemático

Como ya hemos visto, para una carga no relativista en un campo electromagnético existe una distinción entre su energía asociada y el hamiltoniano el cual depende del gauge considerado.

Existe una transformación gauge particular que en que el hamiltoniano se reduce a la energía cinética.

Haciendo la transformación gauge

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \text{y} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda\end{aligned}$$

entonces el hamiltoniano se reduce a un solo término de energía cinética

$$H' = \frac{1}{2m} (\vec{p}' - q\vec{A}')^2 + q\phi'(\vec{x}, t) + U \equiv \frac{1}{2m} (\vec{p}' - q\vec{A}')^2$$

siendo

$$\vec{p}' = m\vec{x} + q\vec{A}'$$

De las ecuaciones de la transformación gauge de segunda clase se obtiene

$$\begin{aligned}\Lambda(\vec{x}, t) &= \int_0^t \phi dt + \frac{t}{q} U(\vec{x}) \quad \text{y} \\ \vec{A}'(\vec{x}, t) &= \vec{A}(\vec{x}, t) + \int_0^t \vec{\nabla} \phi dt + \frac{t}{q} \vec{\nabla} U(\vec{x})\end{aligned}$$

Evidentemente las ecuaciones de Hamilton para H^* da las ecuaciones correctas para la ley de Newton para la fuerza de Lorentz.

La energía asociada a la partícula será

$$\tilde{\mathcal{E}}_p \equiv H_p - q\phi_T(\vec{x}, t) = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + U(\vec{x})$$

y cumple con la ecuación de la disipación de la energía

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}_p}{dt} = q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Gauge de Hamilton y de radiación

Consideremos la transformación

$$\phi^* = \phi - \partial_t \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{y} \quad \vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

con el campo gauge

$$\Lambda(\vec{x}, t) = \int_0^t \phi(\vec{x}, t') dt'$$

Esta transformación no es covariante, y además tiene un gauge residual, ya que se le puede sumar cualquier función arbitraria Λ^* que verifique la condición $\partial_t \Lambda^* = 0$ de forma que las ecuaciones queden invariantes.

Por tanto se puede imponer una condición adicional

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* \equiv 0$$

y puesto que

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda + \Lambda^*)$$

el campo gauge Λ^* cumplirá simultáneamente con las dos condiciones

$$\nabla^2(\Lambda + \Lambda^*) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* \quad \text{y} \quad \partial_t \Lambda^* = 0$$

La anterior ecuación es de tipo de Poisson cuya solución viene dada por

$$\Lambda + \Lambda^* = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^*_{,t}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Los significados del campo electromagnético

Puesto que el campo eléctrico es invariante ante las transformaciones gauge tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{E} - \vec{\nabla} \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y por tanto en el vacío sin cargas

$$\partial_t (\Delta + \Delta')(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = 0$$

Por tanto, en el vacío, $\vec{A}''$ es un campo transversal

$$\vec{A}'' \equiv \vec{A}''_T \quad \text{y} \\ \phi'' \equiv 0$$

En el vacío donde no hay fuentes, este tipo de gauge se llama también de radiación, y las ecuaciones de los potenciales en este caso vienen dadas por

$$\nabla^2 \vec{A}_T - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}, t) = \phi = 0$$

La solución más simple son ondas planas polarizadas transversalmente

$$\vec{A}_T = a_{\vec{\epsilon}_1, \vec{k}} \vec{\epsilon}_1 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{\epsilon}_2, \vec{k}} \vec{\epsilon}_2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

siendo ortogonales

$$\vec{\epsilon}_1 \perp \vec{\epsilon}_2 \perp \vec{k}$$

Recuérdese que $\vec{A}_T$ tiene que tener paridad impar, propiedad que hereda también el fotón.

Aunque todos los gauges son equivalentes, sin embargo, en algunas representaciones el tratamiento matemático se simplifica, lo que a veces es importante en mecánica cuántica para la resolución rigurosa de los problemas de radiación.

Las transformaciones gauge imponen restricciones sobre las 4 componentes de los potenciales A^α . Como en este caso es posible eliminar la componente temporal del potencial escalar.

Ecuaciones longitudinales y transversales sin libertad gauge del campo electromagnético

Ya hemos visto en el capítulo de teorías vectoriales que las ecuaciones del campo electromagnético pueden separarse en sus componentes longitudinales y transversales. Veremos en esta sección, que se pueden llegar también a dichas ecuaciones a partir de una formulación lagrangiana o hamiltoniana sin libertad gauge en los potenciales si se eliminan las componentes longitudinales responsables de ello.

Volviendo a escribir los campos en sus componentes longitudinales y transversales

$$\vec{A} = \vec{A}_L + \vec{A}_T = -\vec{\nabla}\phi_A + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_A$$

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_T = -\vec{\nabla}\phi_L + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_E = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi_L$$

siendo

$$\vec{E}_T \equiv -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi_T = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t}$$

$$\vec{E}_L \equiv -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}\phi$$

estando definidos

$$\phi_L \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \phi_A}{\partial t} + \phi$$

$$\vec{A}_E \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \vec{A}_A}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\phi_T \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t}$$

A veces a ϕ_L se le denomina como ϕ_L , por estar asociado a la componente $\vec{E}_L$

$$\phi_E \equiv \phi_L$$

Es importante observar que se verifica la identidad

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \equiv \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi_L$$

Por tanto, la indeterminación gauge se puede eliminar empleando solo $\vec{A}_T, \phi_L$, que son gauges invariantes y por tanto observables.

Los significados del campo electromagnético

La componente longitudinal $\vec{A}_L$ no es gauge invariante y, por tanto, no es un observable; además está determinada por las otras componentes y las condiciones de contorno.

Se define la lagrangiana independiente del campo gauge como

$$\tilde{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\left(\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \phi_L)^2 + c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T)^2 \right) - \rho \phi_L + \vec{A} \cdot \vec{J} + \frac{\rho_m}{2} \vec{v}_p^2$$

siendo para una carga puntual

$$\rho_m(\vec{x}, t) = m_0 \rho \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\rho(\vec{x}, t) = q \rho \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \rho \vec{v}_m \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

Observemos que $\tilde{\mathcal{L}}$ se diferencia de la densidad de lagrangiana $\mathcal{L}$ normalmente definida en una diferencial total respecto al tiempo, por lo que son equivalentes y llevan a las misa ecuaciones variacionales.

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L} + \frac{d}{dt} (q \phi_A)$$

Definiendo los momentos canónicos de la forma habitual

$$\vec{\Pi}_{\vec{A}_T} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \vec{A}_{T,t}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vec{A}_{T,t}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vec{E}_{T,t}} = -\epsilon_0 \vec{E}_T$$

cuya correspondiente ecuación de movimiento por las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{\partial \vec{\Pi}_{\vec{A}_T}}{\partial t} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \vec{A}_T} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vec{A}_T} + \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vec{B}} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_T + \vec{J}_T$$

que es la ley de Ampère para las componentes transversales.

ϕ_L no es una variable dinámica ya que

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \phi_L} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi_L} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vec{E}_L} = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv 0$$

y

$$\vec{\Pi}_{\phi_L} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \phi_{L,t}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi_{L,t}} \equiv 0$$

por lo que la ecuación de Poisson es una restricción

$$\nabla^2 \phi_L = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Además, ϕ_L es gauge invariante y no depende del tiempo

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial t} \equiv 0$$

De igual forma la densidad hamiltoniana sin libertad gauge se define como

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \int_{V_\infty} \tilde{\mathcal{H}} d^3x = \int \left(\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \vec{A}_T} \cdot \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - \tilde{\mathcal{L}} \right) d^3x = \vec{p}^L \cdot \vec{v} + \int \vec{\Pi}_{\vec{A}_T} \cdot \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} d^3x \\ \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2\epsilon_0} \vec{\Pi}_{\vec{A}_T}^2 - \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{\nabla} \phi_L)^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T)^2 + \rho \phi_L + \frac{1}{2\rho_m} (\vec{\Pi}_{\vec{p}} - \rho \vec{A}_T)^2 \end{aligned}$$

siendo

$$\vec{p}^L = m_0 \vec{v} + q \vec{A}_T(\vec{x}_p, t)$$

La energía contenida en todo el espacio como ya vimos viene dada por

$$E \equiv H = \int_{V_\infty} \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3x + \frac{m_0}{2} \vec{v}^2 = \text{Constante}$$

417

Teniendo en cuenta que $\vec{E}_L \equiv -\vec{\nabla} \phi_L$, sera

$$\tilde{H} - E = \int_{V_\infty} (\rho \phi_L - \epsilon_0 \vec{E}_L^2) d^3x = \int_{V_\infty} \phi_L (\rho - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L) d^3x \equiv 0$$

y $\tilde{H}$ coincide con la energía total E .

Las ecuaciones dinámicas de movimiento para ϕ_L se obtienen de las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \Pi_{\phi_L}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Pi_{\phi_L}} \equiv 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\phi_L}}{\partial t} &= -\frac{\delta \tilde{H}}{\delta \phi_L} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi_L} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vec{\nabla} \phi_L} = -\rho + \epsilon_0 \nabla^2 \phi_L \equiv 0 \end{aligned}$$

La ausencia Π_{ϕ_L} en $\tilde{H}$ nos indica que ϕ_L no es una variable dinámica y que la ecuación de Poisson para la ley de Gauss es solo una constrictión, y que por tanto, $\vec{E}_L$ no tiene una ecuación dinámica propia y solo depende de la posición instantánea de las cargas.

De igual forma, la evolución de $\vec{A}_T$ viene dada por

$$\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \vec{\Pi}_{\vec{A}_T}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \vec{\Pi}_{\vec{A}_T}} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}_{\vec{A}_T} = -\vec{E}_T$$

$$\frac{\partial \vec{\Pi}_{\vec{A}_T}}{\partial t} = -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \vec{A}_T} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \vec{A}_T} - \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \vec{B}} = \vec{J}_T - \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_T$$

Teniendo en cuenta las igualdades

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_T = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T = -\nabla^2 \vec{A}_T$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T = 0$$

se obtiene otra vez la ecuación de ondas transversal

$$c^2 \epsilon_0 \nabla^2 \vec{A}_T - \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_T}{\partial t^2} = -\vec{J}_T$$

El potencial vector que es quién define el campo electromagnético, será una función retardada de la componente transversal de la corriente

$$\vec{A}_T(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{J}_T]_r}{r} d^3x'$$

Además, puesto que

$$\vec{J}_L = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi_L$$

de la definición de ϕ_L será

$$\vec{J}_L(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

por lo que $\vec{J}_L$ es una función no local de $\vec{J}$. De la ecuación de conservación de la carga tenemos además

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_L + \partial_t \rho = 0$$

El potencial vector que es quién define el campo electromagnético, será una función de la componente transversal de la corriente.